# Tutoriel – Propagation des incertitudes

## Propagation de l'incertitude

Nous avons expliqué précédemment comment évaluer l'incertitude sur une mesure expérimentale. Mais comment évaluer l'incertitude lorsque différentes mesures sur des quantités physiques sont combinées pour déterminer une nouvelle quantité. Ceci est le sujet de l'étude de la propagation de l'incertitude.

Si vous pensez que l'erreur aléatoire telle qu'obtenue en appliquant les règles de calculs est plus petite qu'elle ne le devrait, examinez la possibilité de présence d'erreurs systématiques et mentionnez-les dans vos résultats finaux.

- **Incertitude d'une mesure = Erreurs aléatoires + Erreurs systématiques**

### Formule générale

Dans les discussion ci-dessous, les quantités mesurées sont représentées par des lettres (Ex. $x$, $y$, …) alors qu'un delta $\Delta$ suivit par une lettre (Ex. $\Delta x$, $\Delta y$, …) signifie l'incertitude sur une mesure.

Si le résultat $R$ est fonction des mesures $x, y, \ldots$ où $R = f(x, y, \ldots)$ alors

$$\boxed{\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \cdots}\ ,}$$

où $\partial R/\partial x$ est une notation pour une dérivation partielle. C'est la dérivée de $R$ par rapport à $x$ alors qu'on traite toutes les autres variables comme des constantes. Cette formule pour la propagation des erreurs suppose que toutes les variables ($x$, $y$, …) ainsi que leurs incertitudes sont complétement indépendantes. Les sections suivantes présentent quelques cas précis d'application de cette formule générale.

### Additions & Soustractions

Si le résultat $R$ est obtenu à partir d'une suite d'additions et de soustractions comme

$$R = \pm Ax \pm By \pm \cdots \ ,$$

où $A$ et $B$ sont des constantes, alors $\partial R/\partial x = \pm A$ et $\partial R/\partial y = \pm B$. En conséquence, l'erreur sur le résultat $R$ est donnée par

$$\boxed{\Delta R = \sqrt{A^2 \Delta x^2 + B^2 \Delta y^2 + \cdots}\,.}$$

*Exemple*: Calculez $R = 3x + y$ si $x = (11.54 \pm 0.07)\mathrm{cm}$ et $y = (2.1 \pm 0.2)\ \mathrm{cm}$.

$$R = 3(11.54\ \mathrm{cm}) + 2.1\ \mathrm{cm} = 36.72\ \mathrm{cm}$$

$$\Delta R = \sqrt{3^2(0.07\ \mathrm{cm})^2 + (0.2\ \mathrm{cm})^2} = 0.29\ \mathrm{cm}$$

On arrondit l'incertitude à un chiffre significatif et la réponse finale devient $(36.7 \pm 0.3)\mathrm{cm}$.

### Multiplications & Divisions

Si le résultat $R$ est obtenu à partir d'une série de produits comme

$$R = x^A y^B \cdots \quad ,$$

où $A$ et $B$ sont des constantes, alors $\partial R/\partial x = Ax^{A-1}y^B \cdots = AR/x$ et $\partial R/\partial y = Bx^A y^{B-1} \cdots = BR/y$. En conséquence, l'erreur sur le résultat $R$ est donnée par

$$\boxed{\Delta R = |R| \sqrt{A^2 \frac{\Delta x^2}{x^2} + B^2 \frac{\Delta y^2}{y^2} + \cdots} \quad .}$$

*Exemple*: Calculez $R = x^2/y^3$ si $x = (11.54 \pm 0.07)\text{cm}$ et $y = (2.1 \pm 0.2)$ cm.

$$R = (11.54 \text{ cm})^2 (2.1 \text{ cm})^{-3} = 14.38 \text{ cm}^{-1}$$

$$\Delta R = (14.38 \text{ cm}^{-1}) \sqrt{2^2 \left(\frac{0.07 \text{ cm}}{11.54 \text{ cm}}\right)^2 + 3^2 \left(\frac{0.2 \text{ cm}}{2.1 \text{ cm}}\right)^2} = 4.11 \text{ cm}^{-1}$$

On arrondit l'incertitude à un chiffre significatif et la réponse finale devient $(14 \pm 4)\text{cm}^{-1}$.

### Fonctions trigonométriques

Considérez le cas où le résultat $R$ est obtenu à partir de fonctions trigonométriques comme dans

$$R = x \sin\theta \quad .$$

Les dérivées partielles nécessaires pour utiliser l'équation générale sont alors $\partial R/\partial x = \sin\theta$ et $\partial R/\partial\theta = x\cos\theta$. En conséquence, l'erreur sur le résultat $R$ est donnée par

$$\Delta R = \sqrt{\sin^2\theta\, \Delta x^2 + x^2 \cos^2\theta\, \Delta\theta^2} \quad ,$$

où $\theta$ et $\Delta\theta$ devraient toujours être exprimés en radians. Un angle en radians correspond à sa valeur en degrés multipliée par $\pi/180$.

*Exemple*: Calculez $R = x\sin\theta$ si $x = (11.54 \pm 0.07)\text{cm}$ et $\theta = (20 \pm 1)°$.

On convertit d'abord l'angle en radians: $\theta_{rad} = \pi\theta/180 = (0.349066 \pm 0.017453)$.

$$R = (11.54 \text{ cm}) \sin(0.349066) = 3.9469 \text{ cm}$$

$$\Delta R = \sqrt{\sin^2(0.349066)\,(0.07 \text{ cm})^2 + (11.54 \text{ cm})^2 \cos^2(0.349066)\,(0.017453)^2} = 0.190773 \text{ cm}$$

On arrondit l'incertitude à un chiffre significatif et la réponse finale devient $(3.9 \pm 0.2)\text{cm}$.

### Autres fonctions

Dans tous les autres cas ($R = \ln x$, $R = e^x$, …), vous devriez toujours utiliser l'équation générale afin de dériver la formule de propagation de l'erreur tel qu'illustré dans le cas des fonctions trigonométriques présenté ci-haut.